Superfici Cubiche di $\mathbb{P}^3$

Consideriamo nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$(K), su un campo K algebricamente chiuso, gli insiemi algebrici proiettivi del tipo S=$\mathbf{V}$(F) con F∈K[X,Y,Z,T] omogeneo di grado tre. Questi insiemi proiettivi sono le superfici cubiche di $\mathbb{P}^3$. Trattiamo prima il caso in cui il polinomio F è riducibile.

1. Supponiamo che F si decomponga in fattori irriducibili come F=GH con G omogeneo di grado due e H di grado uno. Allora S=$\mathbf{V}$(G)∪V(H), ovvero S è risucibile ed è unione di una quadrica irriducibile Q e di un piano P in $\mathbb{P}^3$. Per la quadrica Q abbiamo due casi: Q può essere un cono quadrico o una quadrica liscia.

2. Supponiamo che F si decomponga come F=GHL polinomi omogenei di grado uno. Allora S è unione di tre piani che possono essere tutti distinti, due piani uno dei quali con molteplicità due o un solo piano di molteplicità tre.

In coclusione una superficie cubica riducibile di $\mathbb{P}^3$ può essere:

- Unione di un piano P e una quadrica liscia Q. In tal caso il luogo P∩Q è una conica singolare per S.

- Unione di un piano P e di un cono quadrico C. In tal caso il luogo P∩C è una conica singolare per S.

- Unione di tre piani di $\mathbb{P}^3$ contati con molteplicità.

Consideriamo ora superfici cubiche irriducibili. Ammetteremo che se S è una superficie irriducibile di grado d in $\mathbb{P}^3$ e H un piano generico allora S∩H è una curva piana irriducibile di grado d. Tra le superfici cubiche irriducibili distinguiamo tre casi:

1. Coni cubici.

2. Superfici cubiche singolari non costruite su cubiche piane.

3. Superfici cubiche lisce.

Definizione 0.1. Una superficie S è un cono di vertice il punto v∈$\mathbb{P}^3$ e base la curva C se S=$\bigcup_{pinC}$<v,p>.

Osserviamo che possiamo sempre supporre la curva base C piana. Infatti se S fosse un cono su una generica curva di $\mathbb{P}^3$ potremmo sempre trovare una curva piana che è una sua base intersecando S con un generico piano H non passante per v.

Lemma 0.0.1. *Una superficie cubica S di $\mathbb{P}^3$ è un cono di vertice v se e solo se v è un punto singolare di molteplicità d per S. In tal caso S è un cono su una curva piana di grado d.*

Dimostrazione: Supponiamo che S sia un cono di vertice v. Il generico piano H per v interseca S in una curva piana C di grado d. Pertanto C=$\bigcup_{J=1}^{d}$L$_j$ con L$_J$ rette per v. Allora v è singolare per S e ha molteplicità d.
Viceversa sia v singolare di molteplicità d per s. Il generico piano H interseca S in una curva piana C di grado d. Il punto v è di molteplicità d per C pertanto C=$\bigcup_{J=1}^{d}$L$_j$ con L$_J$ rette per v. La generica sezione piana per v di S è costituita da d rette pertanto S è un cono di verice v. □

Al fine di descrivere i possibili coni cubici di $\mathbb{P}^3$ consideriamo le possibili cubiche piane.

Lemma 0.0.2. *Sia C una cubica piana proiettiva irriducibile allara C ha al più un punto singolare che può essere solo un punto doppio.*

Dimostrazione: Sia p un punto singolare per C. Supponiamo che esista un punto q≠p in C singolare per C. La retta R=<p,q> interseca C in almeno quattro punti contati con molteplicità e questo è assurdo perchè contraddice il teorema di Bezout.
Sia ora p∈C un punto singolare se fosse m$_p$(C) maggiore o uguale a tre avremmo che preso q su C diverso da p la retta R=<p,q> intersecherebbe C in almeno quattro punti, ancora un assurdo. □

Tra le cubiche irriducibili di $\mathbb{P}^2$ abbiamo le cubiche lisce e le cubiche singolari. Ogni cubica singolare ha un solo punto singolare che è doppio. Si dimostra che tale singolarità è un nodo oppure una cuspide ordinaria e che due cubiche singolari sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno singolarità della stessa natura.
Distinguiamo allora tra i coni costruiti su una cubica liscia, i coni su una cubica nodale e i coni su una cubica cuspidale.

- La superficie S di $\mathbb{P}^3$ definita da F(X,Y,Z,T)=X^3+Y^3+Z^3=0 è un cono cubico su una cubica liscia di $\mathbb{P}^2$. Notiamo che (∂_XF,∂_YF,∂_ZF,∂_TF)=(3X^2,3Y^2,3Z^2,0). Le derivate parziali sono identicamente nulle nel punto v=[0:0:0:1] di $\mathbb{P}^3$. Quindi Sing(S)=v. Consideriamo ora il piano H di equazione T=0, tale piano taglia S in una cubica liscia piana. Vediamo allora che S è proprio un cono cubico di vertice v su una cubica piana liscia. Notiamo che anche tutte le derivate seconde di F si annullano in v mentre esiste una derivata terza non nulla. Ritroviamo che v è di molteplicità tre per S.
- La superficie S di $\mathbb{P}^3$ definita da F(X,Y,Z,T)=Y^{2}Z-X^{2}Z-X^3=0 è un cono cubico su una cubica nodale di $\mathbb{P}^2$.

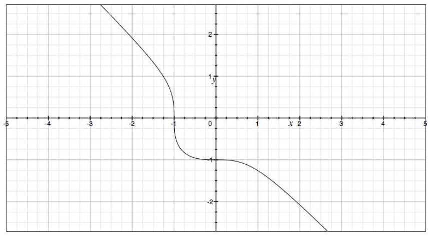

Figura 1: Cubica liscia

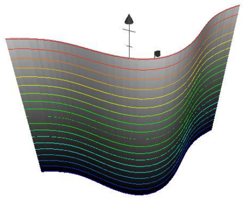

Figura 2: Cono su una cubica liscia

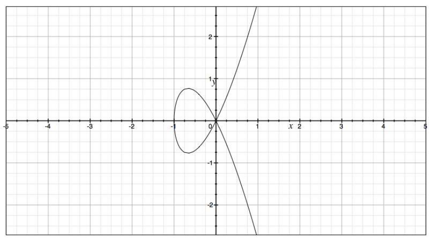

Figura 3: Cubica liscia

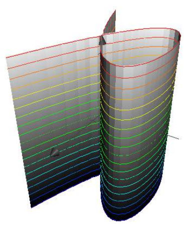

Figura 4: Cono su una cubica liscia

Notiamo che $(\partial_X F, \partial_Y F, \partial_Z F, \partial_T F) = (-2XZ-3X^2, 2YZ, Y^2-X^2, 0)$. Abbiamo che Sing(S)=$R \cup \{v\}$ dove R è la retta $\{X=0, Y=0\}$ e v=[0:0:0:1]. Consideriamo ora il piano H di equazione T=0, H taglia S nella cubica piana C di equazione $G(X,Y,Z)=Y^2Z-X^2Z-X^3=0$. Nella curta affine U_Z tale cubica ha equazione $G^*(x,y)=y^2-x^2-x^3=0$. Vediamo che il punto (0,0) è un punto doppio per C*. Le tangenti principali sono le rette y-x=0 e y+x=0. Nel proiettivo si ha che p=[0:0:1] è un punto doppio per C e le tangenti principali a C in p sono le rette Y-X=0 e Y+X=0. Concludiamo che C è una cubica nodale con un nodo in p e che S è un cono cubico di vertce v sulla cubica nodale C. Notiamo che la retta singolare R è la retta passante per p e per v.

- La superficie S di $\mathbb{P}^3$ definita da $F(X,Y,Z,T)=Y^2Z-X^3=0$ è un cono cubico su una cubica cuspidale di $\mathbb{P}^2$.

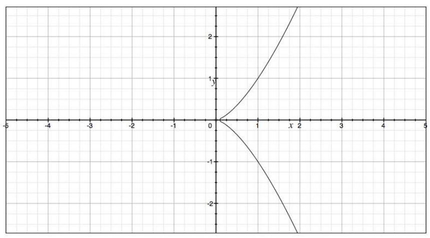

Figura 5: Cubica liscia

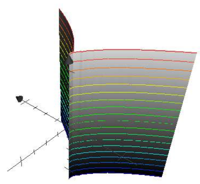

Figura 6: Cono su una cubica liscia

Si ha $(\partial_X F, \partial_Y F, \partial_Z F, \partial_T F) = (-3X^2, 2YZ, Y^2 0)$. Abbiamo che Sing(S)=$R \cup \{v\}$ dove R è la retta $\{X=0, Y=0\}$ e v=[0:0:0:1]. Consideriamo ora il piano H di equazione T=0, H taglia S nella cubica piana C di equazione $G(X,Y,Z)=Y^2Z-X^3=0$. Il punto p=[0:0:1] è singolare per C, C è una cubica cuspidale. Allora S è un cono divertice v sulla cubica cuspidale C. Notiamo ancora che la retta singolare R è proprio la retta passante per v e per il punto p.

Lemma 0.0.3. *Sia S un cono cubico di vertice v e H un piano non passante per v. Se la cubica C=S∩H è singolare allora S è razionale.*

Dimostrazione: Esiste p∈C punto doppio. La retta R=<p,v> è doppia per S. Consideriamo V=S-R, V è un aperto di S. Sia P un piano non passante per p. Per ogni q∈V si ha che la retta L_q=<p,q> non interseca ulteriormete V. Allora è ben definita la proiezione di V da p su un aperto di P. La proiezione induce un isomorfismo tra un aperto di S e un aperto di $\mathbb{P}^2$ quindi S è razionale. □

Consideriamo ora superfici cubiche irriducibili e singolari che non sono dei coni. Sappiamo che per ogni varietà algebrica X si ha che Sing(X) è un chiuso proprio di X ovvero una sottovarietà di X. Per una superficie cubica S distinguiamo due casi:

1. dim(Sing(S))=1, ovvero S è singolare lungo una curva.
2. dim(Sing(S))=0, ovvero S è singolare su punti isolati.

Proposizione 0.0.1. Una superficie cubica S irriducibile e singolare che non è un cono è sempre razionale.

Dimostrazione: Se p è un punto singolare per S allora p deve essere di molteplicità due perchè in caso contrario S sarebbe un cono di vertice p. Ora Sing(S) è unione arbitraria di curve e punti in S pertanto è un chiuso e V=S-Sing(S) è un aperto di S. Sia ora p∈Sing(S) e sia H un piano che non interseca Sing(S), in particolare H non passa per p. Sia q∈V un punto. La retta R=<p,q> non interseca ulteriormente S infatti in caso contrario sarebbe contenuta in S. Allora la mappa di proiezione da p su H che associa a q il punto h=R∩H è ben definita ed induce un isomorfismo tra un aperto di S è un aperto di $\mathbb{P}^3$, quindi S è razionale. □

Consideriamo ora una cubica singolare lungo una curva. Vogliamo mostrare che in tal caso Sing(S) è una retta.

Proposizione 0.0.2. Sia S una cubica singolare lungo una curva. Allora tale curva è una retta R inoltre R è una retta doppia per S e Sing(S)=R.

Dimostrazione: Sia C una curva singiolare per C. Sia deg(C)=d. Sia H un piano, H interseca C in d punti che sono singolari per S. Consideriamo la cubica G=H∩S, i d punti in H∩C sono singolari anche per G, ma G è una cubica e quidi d=1 pertanto C è una retta R. Se ora R fosse una retta tripla per S un piano H=<p,R> con p∈S e p∉R sarebbe contenuto in S ma S è irriducibile.
Supponiamo ora che esiste p∈S singolare e p∉R. Consideriamo il piano P=<p,R>. Ora P∩S è una curcva di grado tre, in particolare tale curva è custituita da R con molteplicità due e da un'altra retta L passante per p. Quindi la retta L

dovrebbe essere singolare in p e questo è assurdo. □

Ad esempio la superficie cubica S di equazione XY^2-Z^2T=0 è una superficie cubica con retta doppia, detta supericie cubica rigata di prima specie.
Infatti (∂_XF,∂_YF,∂_ZF,∂_TF)=(Y^2,2XY,-2ZT,-Z^2). Vediamo che Sing(S)=R dove R è la retta {Y=Z=0}. Sia ora p un punto di R allora p è della forma [a:0:0:b]. Ora ∂_{YY}F=2X e ∂_{ZZ}F=-2T in un punto di R tali derivate seconde non si annullano mai contemporaneamente, quindi ogni punto di R è doppio per S.
Sia ora H un piano per R. Sappiamo che H∩R è una curva di grado tre. Tale curva contiene R con molteplicità due quindi necessariamente è del tipo R∪L con L retta contenuta in S. Notiamo che L è diversa da R perchè R è una retta doppia per S.
Sia ora p∈S-R. Consideriamo il piano P=<p,R>. Per quanto detto prima P∩S individue un'altra retta L_p passante per p e contenuta in S che incontra R. Inoltre tale retta è unica, infatti se esistesse T_p altra retta per p che incontra R contenuta in S avrei che T_p è anche contenuta in P e quindi P intersecherebbe S in una curva di grado quattro, questo implica P⊆S, assurdo perchè S è irriducibile.
La retta D definita da {X=T=0} è contenuta in S e non incontra R. Sia p∈D consideriamo T_pS piano tangente a S in p. Ora T_pS interseca S in una curva di grado tre e contiene D. Pertanto T_pS non contiene R perchè R e D sono sghembe. Quindi T_pS∩S consta della retta D e di una conica C. Ora se q∈T_pS∩S si ha che q è singolare per la curva d'intersezione quindi q è singolare per C, pertanto C è unione di due rette. Concludiamo che T_p∩S=D∪R_1∪R_2 e per quanto visto prima una tra le rette R_1 e R_2 coincide con L_p.
Siano q_1=[0:0:0:1] e q_2=[1:0:0:0]. Se q è un punto di R diverso da q_1 e da q_2 allora esistono due rette L,L' passanti per q, contenute in S che intersecano D. Se q=q_1 o q=q_2 la retta è unica.
Sia q=[a:0:0:b] un punto di R. I piano passanti per q sono della forma bX-aT=0. Distinguiamo due casi:

- Se a≠0 posso ricavare T=(b/a)X e andoando a sostituire nell'equazione di S si ha X(aY^2-bZ^2)=0. Se b=0 troviamo un'unica retta. Se b≠0 troviamo due rette distinte.

- Se b≠0 allora X=(a/b)T da cui T(aY^2-bZ^2)=0. Se a=0 ottengo una sola retta. Se a≠0 si hanno due rette distinte.

Quindi le rette L e L' sono coincidenti se e solo se q=q_1 o q=q_2.
Abbiamo mostrato che S contiene le rette R,D e tutte le rette del tipo L_p. Vogliamo mostrare che queste sono tutte le rette contenute in S.
Sia L una retta non del tipo L_p. Quindi L non interseca R. Supponiamo che L sia contenuta in S e che sia diversa da D. Abbiamo due possibilità o L e D sono

sghembe oppure si incontrano.
Se L e D si incontrano sia p=L$\cap$D allora $T_p\cap$S contiene D e L. Sappiamo che T_pS$\cap$S constra di tre rette, perciò T_pS$\cap$S=D$\cup$L$\cup$T ma allota T è del tipo L_p e incontra R in q punto singolare per la curva d'intersezione. La singolarità di q impone che anche la retta L passi per q. Ma questo è assurdo perchè per ipotesi L non interseca R.
Se L e D sono sghembe allora posso considerare le tre rette L,R,D contenute in S e sghembe a due a due. Per ogni punto p$\in$L esiste un'unica retta T_p che interseca R e D. Sia q il punto d'intersezione di T_p con R. Esistono al più due rette per q che intersecano D e T_p deve essere una tra queste, in particolare T_p è contenuta in S. Inoltre le rette del tipo T_p sono sghembe a due a due perchè in caso contrario troverei che R e D sono complanari. Quindi ho una schiera di rette sghembe contenute in S pertanto la quadrica liscia Q=$\bigcup_{pinL}T_p$ è contenuta in S. Ma questo è assurdo perchè S è irriducibile.

Consideriamo ora superfici cubiche singolari con sole singolarità isolate.

Lemma 0.0.4. *Ogni superficie cubica con solo singolarità isolate ha al più quattro punti singolari.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che S sia una superficie cubica con Sing(S)=$\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$, cinque punti distinti. Tali punti hanno almeno molteplicità due per S. Sia R=$<p_1,p_2>$ la retta per p_1 e p_2, abbiamo che R$\subseteq$S. Consideriamo ora un piano H per p_3, p_4 e p_5. La retta R e il piano H si intersecano in un punto p. Ora H$\cap$S è una cubica piana con tre punti singolari pertanto è unione di tre rette L$\cup$T$\cup$F. Ora p$\in$H$\cap$S=L$\cup$T$\cup$F e p$\in$R ovvero p$\in$(R$\cap$L)$\cup$(R$\cap$T)$\cup$(R$\cap$F). Ovvero p$\in$L$\cap$T$\cap$F e questo è assurdo perchè la cubica piana L$\cup$T$\cup$F ha tre punti singolari. $\square$

Diamo un esempio di superficie cubica con esattamente quattro punti singolati. Consideriamo la superficie S di equazione YZT+XZT+XYT+XYZ=0. Si ha $(\partial_X F,\partial_Y F,\partial_Z F,\partial_T F)$=(ZT+YT+YZ,ZT+XT+XZ,YT+XT+XY,YZ+XZ+XY). Le derivate parziali si annullano contemporaneamente in tutti e soli i punti [1:0:0:0], [0:1:0:0], [0:0:1:0] e [0:0:0:1].

Consideriamo ora le superfici cubiche lisce.
La superfice S di equazione F(X,Y,Z,T)=$X^3+Y^3+Z^3+T^3=0$ è una cubica liscia di $\mathbb{P}^3$. Infatti $(\partial_X F,\partial_Y F,\partial_Z F,\partial_T F)=(3X^2,3Y^2,3Z^2,3T^2)$non è mai identicamente nullo in $\mathbb{P}^3$.

Per le cubiche lisce si può dimostrare che:

Lemma 0.0.5. *Ogni cubica liscia contiene una retta e che ogni cubica liscia contiene esattamente 27 rette.*

Lemma 0.0.6. *Una superficie cubica di $\mathbb{P}^3$ è razionale se e solo se non è un cono su una cubica piana liscia.*

Per concludere vogliamo provare che ogni superficie cubica di $\mathbb{P}^3$ contiene almeno una retta.
Consideriamo $\mathbb{P}^n$. Dare un'ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^n$ è equivalente a dare un polinomio omogeneo di grado d in n+1 variabili a meno di una costante moltiplicativa non nulla, ovvero un elemento di $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n^d)$ proiettivizzato dello spazio vettoriale S_n^d dei polinomi omogenei di grado d in n+1 variabili. Sappiamo che $\dim(\mathrm{S}_n^d)=\frac{(n+d)!}{d!n!}$ quindi $\dim(\mathbb{P}(\mathrm{S}_n^d))=\frac{(n+d)!}{d!n!}$-1.
Vediamo allora che le ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}^n$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di $\mathbb{P}^N$ dove $\mathrm{N}=\frac{(n+d)!}{d!n!}$-1.
Per n=d=3 si ha $\mathrm{N}=\frac{(3+3)!}{3!3!}$-1=19.
In particolare le superfici cubiche di $\mathbb{P}^3$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di $\mathbb{P}^{19}$.
La quadrica di Klein $\mathrm{K}\in\mathbb{P}^5$ parametrizza tutte le rette di $\mathbb{P}^3$. Consideriamo ora le mappe di proiezione Consideriamo ora le generiche superfici di grado d in $\mathbb{P}^3$. Quindi d'ora in poi sarà $\mathrm{N}=\frac{(3+d)!}{3!n!}$-1.

$$\mathrm{F}:\mathbb{P}^N\times\mathrm{K}\rightarrow\mathbb{P}^N \text{ che manda } (p,q)\mapsto p,$$
$$\mathrm{G}:\mathbb{P}^N\times\mathrm{K}\rightarrow\mathrm{K} \text{ che manda } (p,q)\mapsto q.$$

Tali mappe sono morfismi algebrici suriettivi.
Sia ora $\mathrm{X}_d\subseteq\mathbb{P}^N\times\mathrm{K}$ l'insieme delle coppie (p,q) tali che la retta Q corrispondente al punto $q\in\mathrm{K}$ è contenuta nella superficie S di grado d corrispondente a $p\in\mathbb{P}^N$. Ammetteremo che X_d è una varietà proiettiva. Vogliamo ora determinarne la dimensione. Notiamo che per ogni retta L di $\mathbb{P}^3$ è possibile trovare una superficie di grado d che la contiene, basta infatti considerare la superficie costituita da d piani nel fascio di L. Questo ci dice che la restrizione di G a X_d è ancora suriettiva ovvero che $\mathrm{G}(\mathrm{X}_d)=\mathrm{K}$. Per un $q\in\mathrm{K}$ determiniamo la dimensione della fibra $\mathrm{G}^{-1}(q)$. A meno di una proiettività possiamo assumere che la retta corrispondente a q sia data da $\mathrm{T}_0=\mathrm{T}_1=0$ dove $[\mathrm{T}_0:\mathrm{T}_1:\mathrm{T}_2:\mathrm{T}_3]$ sono le coordinate omogenee su $\mathbb{P}^3$.
Ora i punti $p\in\mathbb{P}^N$ tali che $(p,q)\in\mathrm{G}^{-1}(q)\subseteq\mathrm{X}_d$ corrispondono alle superfici di grado d di $\mathbb{P}^3$ che contengono la retta $\mathrm{T}_0=\mathrm{T}_1=0$, ovvero ai polinomi omogenei P di grado d che si scrivono come $\mathrm{P}=\mathrm{T}_0\mathrm{P}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{P}_1$ con P_0 e P_1 polinomi di grado d-1. Denotiamo con
$\mathrm{V}=\{\mathrm{P}\in\mathrm{K}[\mathrm{T}_0:\mathrm{T}_1:\mathrm{T}_2:\mathrm{T}_3]_d$ tali che $\mathrm{P}=\mathrm{T}_0\mathrm{P}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{P}_1$ con $\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1\in\mathrm{K}[\mathrm{T}_0:\mathrm{T}_1:\mathrm{T}_2:\mathrm{T}_3]_{d-1}\}$.
Osserviamo che V è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{K}[\mathrm{T}_0:\mathrm{T}_1:\mathrm{T}_2:\mathrm{T}_3]_d$ infatti se $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathrm{V}$ si ha $\mathrm{P}=\mathrm{T}_0\mathrm{P}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{P}_1$ e $\mathrm{Q}=\mathrm{T}_0\mathrm{Q}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{Q}_1$, se $a,b\in\mathrm{K}$ allora
$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}=a(\mathrm{T}_0\mathrm{P}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{P}_1)+b(\mathrm{T}_0\mathrm{Q}_0+\mathrm{T}_1\mathrm{Q}_1)=\mathrm{T}_0(a\mathrm{P}_0+b\mathrm{Q}_0)+\mathrm{T}_1(a\mathrm{P}_1+b\mathrm{Q}_1)\in\mathrm{V}$.
Vogliamo ora calcolare la dimensione di V. Consideriamo la mappa $\mathrm{H}:\mathrm{S}_{d-1}\times\mathrm{S}_{d-1}\rightarrow\mathrm{S}_d$

definita da $H(P_0,P_1)=T_0P_0+T_1P_1$. Notiamo che $H(a(P_0,P_1)+b(Q_0,Q_1))=$
$=H((aP_0+bQ_0,aP_1+bQ_1))=T_0(aP_0+bQ_0)+T_1(aP_1+bQ_1)=a(T_0P_0+T_1P_1)+b(T_0Q_0+T_1Q_1)=$
$=aH(P_0,P_1)+bH(Q_0,Q_1)$. Quindi H è un morfismo di spazi vettoriali e $Im(H)=V\subseteq S_d$.Abbiamo allora che:
$\dim(V)=\dim(S_{d-1}\times S_{d-1})-\dim(Ker(H))=2\frac{(d+2)!}{3!(d-1)!}-\dim(Ker(H))$.
Sia ora $(P,Q)\in Ker(H)$ allora $T_0P+T_1Q=0$ da cui $T_0P=-T_1Q$, quindi $T_0|Q$ e $T_1|P$, $Q=T_0Q'$ e $P=T_1P'$ con $P',Q'\in S_{d-2}$. Da $T_0P+T_1Q=0$ si ha $T_0T_1P'+T_1T_0Q'=0$ e quindi $Q'=-P'$.
Allora $Ker(H)=\{(P,Q)$ tali che $P=T_1P'$ e $Q=-T_0P'\}=\{(T_1P',-T_0P')$, con $P'\in S_{d-2}\}$.
Quindi Ker(H) è in biezione con S_{d-2} e pertanto $\dim(Ker(H))=\frac{(d+1)!}{3!(d-2)!}$. Allora
$\dim(V)=2\frac{(d+2)!}{3!(d-1)!}-\frac{(d+1)!}{3!(d-2)!}=2\frac{(d+2)(d+1)d}{6}-\frac{(d+1)d(d-1)}{6}=\frac{d(d+1)(2d+4-d+1)}{6}=\frac{d(d+1)(d+5)}{6}$.
Abbiamo quindi $\dim(\mathbb{P}(V))=\frac{d(d+1)(d+5)}{6}-1$ e la dimensione della fibra $G^{-1}(q)$ è:

$$\dim(G^{-1}(q))=\frac{d(d+1)(d+5)}{6}-1=N-(d+1)$$

Per procedere dobbiamo considerare i seguenti teoremi sulla dimensione della fibra:

Teorema 0.0.1. Sia $f:X\rightarrow Y$ una mappa regolare suriettiva tra varietà irriducibili. Sia $\dim(X)=n$ e $\dim(Y)=m$. Allora $m\leq n$ e inoltre

- $\dim(X')\geq n-m$ per ogni $y\in Y$ e per ogni componente X' della fibra $f^{-1}(y)$;
- esiste un aperto non vuoto $U\subseteq Y$ tale che $\dim(f^{-1}(y))=n-m$ per ogni $y\in U$.

Teorema 0.0.2. Sia $f:X\rightarrow Y$ una mappa regolare suriettiva tra varietà proiettive, con Y irriducibile. Se per ogni $y\in Y$ le fibre $f^{-1}(y)$ sono irriducibili e hanno la stessa diemensione allora X è irriducibile.

Dal teorema 2 segue che X_d è una varietà irriducibile. Ora G è una mappa regolare suriettiva tra X_d e K varietà irriducibili. Dal teorema 1 si h che $\dim(X_d)=\dim(G^{-1}(q))+\dim(K)=N-(d+1)+4=N+3-d$.
Consideriamo ora la mappa $F:X_d\rightarrow\mathbb{P}^N$. L'immagine $F(X^d)$ è un chiuso in $\mathbb{P}^N$ perchè immagine di una varietà proiettiva sotto una mappa regolare. Inoltre $\dim(F(X_d))\leq\dim(X_d)$.
Se $\dim(X_d)<N$ ovvero se $N+3-d<N$, per $d>3$ si ha che anche $\dim(F(X_d))<N$ ovvero $F(X_d)\neq\mathbb{P}^N$ è un chiuso proprio di $\mathbb{P}^N$. Ovvero esiste un aperto di $\mathbb{P}^N$ costituito da superfici di grado d che non contengono alcuna retta. Abbiamo quindi dimostrato che

Teorema 0.0.3. Per ogni $d>3$ esiste una superficie di grado d in $\mathbb{P}^3$ che non contiene alcuna retta. Inoltre tali superfici sono un aperto di $\mathbb{P}^N$. In altre parole la generica superficie di grado $d>3$ non contiene rette.

Consideriamo ora le superfici cubiche. Ovviamente i coni cubici contengono infinite rette. Vogliamo per prima cosa trovare una superficie cubica che contiene un numero finito di rette.

Consideriamo in $\mathbb{A}^3$ la superficie cubica data da xyz=1. Una retta di $\mathbb{A}^3$ è della forma R=$\{a_0x+a_1y+a_2z+a_3=0,\ b_0x+b_1y+b_2z+b_3=0\}$.Posso sempre ricavare x e y in funzione di z.
Se $a_0\neq0$ e $b_0\neq0$ moltiplicando la seconda equazione per $\frac{a0}{b0}$ e sottraendo la relazione così ottenuta dalla prima si ha $(a_1-\frac{a0}{b0}b_1)y+(a_2-\frac{a0}{b0}b_2)z+a_3-\frac{a0}{b0}b_3=0$. Se fosse $a_1=\frac{a0}{b0}b_1$ e $a_2=\frac{a0}{b0}b_2$ avrei che anche $a_3-\frac{a0}{b0}b_3=0$ da cui $a_3=\frac{a0}{b0}b_3$ e quindi le equazioni di R sarebbero dipendenti. Allora posso supporre $a_1-\frac{a0}{b0}b_1$ e ricavare y in funzione di z, ovvero scrivere y=P(z) come polinomio in z. Da $a_0x+a_1y+a_2z+a_3=0$ posso poi ricavare x in funzione di y e x e quindi x in funzione di z ovvero scrivere x=Q(z) come polinomio in z. Sostituendo nell'equazione della cubica si ha Q(z)P(z)z=1 per ogni $z\in K$ ovvero Q(z)P(z)z-1=0 per ogni $z\in K$. Questo è assurdo perchè T(z)=Q(z)P(z)z-1 è un polinomio non costante e può avere al più deg(T) radici su K algebricamente chiuso. La cubica affine S di equazione xyz=1 non contiene rette. Passiamo ora alla chiusura proiettiva si S ovvero alla cubica S* di $\mathbb{P}^3$ definita da XYZ=T^3. Tale superficie cubica interseca il piano all'infinito T=0 in una cubica piana. Notiamo che le rette R'=$\{X=0,T=0\}$, R"=$\{Y=0,T=0\}$ e R"'=$\{Z=0,T=0\}$ sono contenute sia nella superfice S* e nel piano ovvero sono la cubica d'intersezione. Poichè la parte affine di S* non contiene rette si ha che le tre elencate sono le uniche rette contenute in S*. La cubica S* di $\mathbb{P}^3$ è un esempio di superficie cubica contenente un numero finito di rette.

Sappiamo allora che esiste un punto $s\in\mathbb{P}^{19}$ corrispondente ad una superficie cubica S di $\mathbb{P}^3$ per cui $F^{-1}(s)$ è non vuoto e $\dim(F^{-1}(s))=0$. Consideriamo ancora la mappa $F:X_3\rightarrow F(X_3)$, con tali restrizioni F è suriettiva. Abbiamo un punto s nell'immagine la cui fibra ha dimensione nulla. Sappiamo che $\dim(F^{-1}(s))\geq\dim(X_3)-\dim(F(X_3))$ e $\dim(F^{-1}(s))=0$ implica $\dim(X_3)\leq\dim(F(X_3))$ da cui $\dim(F(X_3))=\dim(X_3)=19$. Abbiamo una sottovarietà chiusa e irriducibile $F(X_3)$ di $\mathbb{P}^{19}$ tale che $\dim(F(X_3))=19$, deve essere $F(X_3)=\mathbb{P}^{19}$.
Concludiamo che per ogni superficie cubica S di $\mathbb{P}^3$ corrispondente al punto s di $\mathbb{P}^{19}$ esiste una coppia $(s,l)\in\mathbb{P}^{19}\times K$ tale che F(s,l)=s. Inoltre dal teorema 1 si ha che esiste U aperto non vuoto di $\mathbb{P}^{19}$ tale che per ogni $s\in U$ si ha $\dim(F^{-1}(s))=0$. Ora $F:\mathbb{P}^{19}\times K\rightarrow\mathbb{P}^{19}$ è regolare e in particolare continua, la fibra $F^{-1}(s)$ è pertanto un chiuso e un chiuso di dimensione zero può essere solo un numero finito di punti. Abbiamo quindi dimostrato che

Teorema 0.0.4. Ogni superficie cubica di $\mathbb{P}^3$ contiene almeno una retta. Inoltre esiste un aperto U di $\mathbb{P}^{19}$ tale che ogni superficie cubica corrispondente ad un punto di U contiene un numero finito di rette. In altre parole la generica superficie cubica di $\mathbb{P}^3$ contiene un numero finito non nullo di rette.

Proposizione 0.0.3. Per ogni punto $p\in S$, superficie cubica liscia, esistono al più tre rette passanti per p e contenute in S. Ogni piano P interseca S o in una cubica irriducibile o una conica più una retta o in tre rette distinte.

<u>Dimostrazione</u>: Sia L una retta per p e contenuta in S. Si ha $T_pL \subseteq T_pS$. Quindi le rette per p contenute in S stanno in $T_p \cap S$=C curva piana di grado tre, quindi sono al più tre. Sia ora P un piano che possiamo assumere di equazione T=0 e sia L la retta {Z=0,T=0} contenuta in P, vogliamo provare che in P∩S non ci sono rette multiple. Se la retta L fosse di molteplicità due per P∩S potremmo scrivere l'equazione di S come $f(X,Y,Z,T)=Z^2F(X,Y,Z,T)+TG(X,Y,Z,T)$, con F omogeneo di grado uno e G di grado due.Le derivate parziali di f sono $(\partial_X f,\partial_Y f,\partial_Z f,\partial_T f)=(Z^2\partial_X F+T\partial_X G,Z^2\partial_Y F+T\partial_Y G,2ZF+Z^2\partial_Z F+T\partial_Z G,Z^2\partial_T F+G+T\partial_T G)$. Per Z=T=0 si trova dalla derivata in T che G(X,Y,0,0)=0 ora G è omogeneo di grado due pertanto ammette due radici contante con molteplicità sulla retta L. Abbiamo così trovato un punto singolare per S, assurdo. □

Sia S una superficie cubica liscia, sappiamo che S contiene una retta L, possiamo supporre L={X=Y=0}. Consideriamo il fascio di piani per L, il generico piano P del fascio è della forma aX+Y=0. Se F(X,Y,Z,T)=0 è l'equazione di S, essendo L⊆S possiamo scrivere

$$F(X,Y,Z,T)=A(X,Y)Z^2+2B(X,Y)ZT+C(X,Y)T^2+2D(X,Y)Z+2E(X,Y)T+F(X,Y)$$

dove dove A,B e C sono polinomi omogenei in X,Y di grado uno, D e E di grado due, infine F di grado tre. Consideriamo $P_a \cap S$ ovvero consideriamo l'equazione $A(X,aX)Z^2+2B(X,aX)ZT+C(X,aX)T^2+2D(X,aX)Z+2E(X,aX)T+F(X,aX)=0$, considerando i gradi dei singoli fattori si ha $XA(1,a)Z^2+2XB(1,a)ZT+XC(1,a)T^2+$ $+2X^2D(1,a)Z+2X^2E(1,a)T+X^3F(1,a)=0$.
Infine $X(A(1,a)Z^2+2B(1,a)ZT+C(1,a)T^2+2D(1,a)XZ+2E(1,a)XT+X^2F(1,a))=0$. Ritroviamo nell'intersezione la retta L è una famiglia di coniche. In generale $P_a \cap S$ è una cubica piana. Sappiamo che tale cubica contiene L e una conica K. Imporre che K sia unione di due rette distinte è equivalente ad imporre la matrice della conica K sia singolare. Infatti K non può essere una retta doppia perchè S è liscia. Si ha

$M(K)=\left\| \begin{matrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{matrix} \right\|$ e $\det(M(K))=A(BF-E^2)-C(CF-ED)+D(CE-BD)=0$. Ora $\det(M(K))$ è un polinomio di grado 5 in K[a] pertanto ha cinque radici contate con molteplicità.

Consideriamo ora il seguente

Lemma 0.0.7. *Sia $\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(t)X_iY_j$ una famiglia di quadriche. Poniamo $D(t)=det(a_{i,j}(t))$. Il numero di quadriche singolari della famiglia è uguale al grado del discriminante D(t).*

Possiamo concludere che data la retta L in S esistono cinque piano P_a per L tali che S∩P consta di tre rette ditinte. Abbiamo trovato altre 10 rette nella cubica S.
Prendere due coniche del tipo $X^2F+CT^2+AZ^2+2DXZ+2EXT+2BZT=0$ significa prendere due punti in $\mathbb{P}^5$, la retta passante per tali punti è un fascio di coniche. Se tra le coniche di tale fascio ci fosse una retta doppia, allora i quattro punti base del fascio sarebbero allineati e quindi avrei che tutte le coniche del fascio sono rette doppie ovvero avrei un'infinità di coniche singolari del tipo $X^2F+CT^2+AZ^2+2DXZ+2EXT+2BZT=0$, e questo è assurdo perchè abbiamo visto che sono cinque. In particalore abbiamo mostrato che:

Proposizione 0.0.4. Ogni retta L in una cubica liscia S interseca esattamente altre 10 rette contenute in S, tali rette sono sudduvise in 5 coppie di rette in modo che le rette di una coppia si intersecano.

Lemma 0.0.8. *Esistono due rette sghembe L e R nella superficie cubica S.*

<u>Dimostrazione</u>: Consideriamo due piani P^1 e P^2 passanti per L tali che $P_1 \cap S = L \cup L_1 \cup L_1$' e $P_2 \cap S = L \cup L_2 \cup L_2$'. Vogliamo mostrare che L_1 e L_2 sono sghembe. Se infatti fosse $L_1 \cap L_2 = q$ ovremmo che $q \in P_1 \cap P_2$ ed essendo la retta L comune ai due piani si avrebbe $P_1 = P_2$, assurdo. □

Teorema 0.0.5. Ogni superficie cubica liscia S è razionale.

<u>Dimostrazione</u>: Siano L e R due rette sghembe nella superficie cubica S. Abbiamo un numero finito di R in S, sia U l'aperto di S ottenuto togliaendo ad S le rette in essa contenute. Preso un punto $p \in V$ sappiamo che esiste un'unica retta T^p per p che incontra L e R. Sia H un piano non contenente nè L nè R. La retta L^p interseca H in un punto f(p). La mappa di proiezione definita da $p \mapsto f(p)$ è un'isomorfismo tra un aperto di S è un aperto di $\mathbb{P}^2$. Quindi S è razionale. □

Si R una retta contenuta in S sghemba con L. Allora R interseca una e una sola tra le due rette di ciascuna delle cinque coppie (T,T'). Infatti la retta R interseca il piano P_a tale che $P_a \cap S = T \cup T' \cup L$. Se R intersecasse sia T che T' avrei che R interseca P_a in due punti da cui $R \subseteq P_a$, assurdo perchè L e R sono sghembe.

Lemma 0.0.9. *Siano L_1,L_2,L_3,L_4 quattro rette disgiunte allora o le quattro rette stanno su una quadrica liscia e hanno infinite trasversali comuni oppure le quattro rette non stanno su una quadrica liscia e hanno una o due trasversali comuni.*

<u>Dimostrazione</u>: Consideriamo L_1,L_2 e L_3, fissiamo un punto p$\in L_1$, esiste un unica retta L_p per p che interseca L_2 e L_3. Preso p'$\in L_1$, p'$\neq$p si ha che la retta $L_{p'}$ non interseca L_p altrimenti L_1 e L_2 risulterebbero complanari. Allora la quadrica liscia Q=$\bigcup_{pinL1}L_p$ contiene L_1,L_2,L_3. Abbiamo mostrato che date tre rette sghembe possiamo sempre trovare una quadrica liscia che le contiene. Ora su Q abbiamo due schiere di rette sghembe, se L_4 è contenuta in Q allora L_4 è nella schiera di L_1,L_2,L_3. Le rette dell'altra schiera sono tutte trasversali delle L_i che pertanto risultano avere infinite trasversali comuni. Se L_4 non è contenuta in Q allora $L_4\cap$ consta di uno o due punti. Le rette della seconda schiera di Q passanti per tali punti sono le uniche trasversali alle L_i e sono una o due. □

Teorema 0.0.6. Una superficie cubica liscia contiene esattamente 27 rette.

<u>Dimostrazione</u>: Sappiamo che ci sono in S due rette sghembe L e M, inoltre M interseca una sola tra le rette L_i e L_i' per ogni coppia (L_i,L_i') i=1,...,5. Possiamo supporre che M intersechi L_i per ogni i. Anche per M abbiamo cinque coppie di rette (L_i,L_i"). Abbiamo fino ad ora considerato L,M,L_i,L_i',L_i", quindi 1+1+5+5+5=17 rette. Vogliamo ora dimostrare che:

1. Data una retta D contenuta in S diversa dalle 17 considerate allora D interseca esattamente tre delle cinque rette L_i.
2. Viceversa che data una tripla di elementi distinti (i,j,k) scelti tra {1,2,3,4,5} allora esiste un'unica retta L_{ijk} contenuta in S che interseca L_i,L_j e L_k diversa da L e da M.

1) Osserviamo che quattro rette sghembe in S non possono stare su una quadrica Q. Infatti ogni altra retta dell'altra schiera intersecherebbe le quattro date, quindi tutte le rette della schiera intersecherebbero S con molteplicità quattro, ovvero sarebbero tutte contenute in S, avrei perciò una quadrica contenuta in S e quindi S sarebbe riducibile, assurdo. Supponiamo ora che D intersechi più di tre rette tra le L_i, più di tre tra le L_i non possono stare su una quadrica liscia, inoltre D è una loro trasversale, ma per 0.0.10 le trasversali comuni sono al più due, pertanto o D=L o D=M, assurdo. Se D interseca meno di tre rette tra le L_i allora interseca più di tre rette tra le L_i' con il precedente ragionamento sulle L_i' si ha ancora un assurdo.
2) Prendiamo ora tre rette tra le L_i che possiamo supporre essere L_1,L_2 e L_3. A meno di proiettività esiste un' unica quadrica liscia Q contenente le tre rette sghembe scelte. Ora Q$\cap$S è una curva di grado sei quindi Q$\cap$S=$L_1\cup L_2\cup L_3\cup$C con C curva di grado tre. Notiamo ora che le rette L ed M intersecano Q in tre punti quindi sono entrambe contenute in Q dunque C=L$\cup$M$\cup L_{123}$. Ora L_{123} è contenuta in Q, se L_{123} fosse sghemba con le L_i per i=1,2,3, avrei quattro rette

sghembe in S contenute in una quadrica liscia, assurdo. Allora L_{123} non è nella schiera di L_1,L_2,L_3, pertanto interseca le L_i ed è la retta cercata.

Ci rimangono da contare le rette del tipo L_{ijk} che sono i modi di scegliere tre rette tra le cinque L_i ovvero bin(5,3)=$\frac{5!}{3!2!}$=10.
Riassumendo abbiamo contato le rette L e M, le 10 rette complenari con L contenute in S, le 10 rette complanari con M di cui cinque in comune con quelle di L. Tra le rette non complanari con L contenute in S abbiamo visto che ci sono esattemnte 10 rette contenute in S che intersecano tre delle L_i diverse da M e da L. Quindi nella cubica S abbiamo 1+1+10+10-5+10=27 rette. □

A.M. - Dicembre 2007